

02-02-2021A

A1 Sia  $\mathbb{R}[x]_n$  lo spazio dei polinomi di una variabile di grado minore o uguale ad  $n > 0$ , sia  $L : \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$  l'applicazione lineare  $L(P) = P'$  (dove  $P'$  e' la derivata di  $P$ ). Quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?

- 1) L'applicazione  $L$  e' iniettiva
- 2) Il nucleo di  $L$  ha dimensione 1
- 3) L'immagine di  $L$  ha dimensione  $n$
- 4) Il nucleo di  $L$  ha dimensione  $n$

A2

Se  $W$  e' un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ , dove  $\mathbb{R}^n$  e' dotato del prodotto scalare canonico, quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?

- 1)  $w \in W^\perp$  se e solo se  $\langle w, u \rangle = 0$  per ogni  $u \in W$
- 2)  $w \in W$  se e solo se  $\langle w, u \rangle = 0$  per ogni  $u \in W^\perp$
- 3)  $w \in W^\perp$  se e solo se  $\langle w, u \rangle = 0$  per qualche  $u \in W$
- 4)  $w \in W$  se e solo se  $\langle w, u \rangle = 0$  per qualche  $u \in W^\perp$ .

A3

Se  $AX = b$  e' una equazione cartesiana di un sottospazio affine  $\Sigma$  di  $\mathbb{R}^n$ , dove  $\dim \Sigma = k$  quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?

- 1) il rango di  $A$  e'  $k$
- 2) il rango di  $A$  e'  $n - k$
- 3) La giacitura di  $\Sigma$  e' generata dalle colonne di  $A$
- 4) L'insieme delle soluzioni del sistema lineare  $AX = b$  contiene  $\Sigma$ .

A4

Se  $X = AT + b$  con  $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}$  e' una equazione parametrica di un sottospazio

affine  $\Sigma$  di  $\mathbb{R}^n$ , dove  $\dim \Sigma = k$  quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?

- 1) il rango di  $A$  e'  $k$
- 2) il rango di  $A$  e'  $n - k$
- 3) La giacitura di  $\Sigma$  e' generata dalle colonne di  $A$
- 4) L'insieme delle soluzioni del sistema lineare  $AT = -b$  contiene  $\Sigma$ .

A5

Sia  $\Pi_1$  il piano di equazione parametrica  $X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  e sia  $\Pi_2$  il

piano di equazione cartesiana  $ax - y - az = b$ , quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?

- 1) esiste un valore di  $a$  ed un valore di  $b$  per il quale questi piani non si incontrano
- 2) esiste un valore di  $a$  ed un valore di  $b$  per il quale questi piani coincidono
- 3) nessuna delle altre affermazioni e' corretta
- 4) dati comunque  $a$  e  $b$  i piani si incontrano

## SOLUZIONI

Ogni risposta corretta vale 3 ogni risposta sbagliata vale -3.

A 1

1 sbagliata, il nucleo di  $L$  e' l'insieme dei polinomi costanti che ha dimensione 1, 2 corretta, 3 corretta infatti  $\dim \text{Imm}L + \dim \text{Ker}L = \dim(R[x]_n) = n + 1$  e  $\dim \text{Ker}L = 1$ . 4 in generale sbagliata a meno che non sia  $n = 1$ .

A2 Dalla definizione di  $W^\perp$  e dal fatto che  $W^{\perp\perp} = W$  segue che 1) e 2) OK 3) e 4) sbagliati

A 3 Dalla definizione di equazione cartesiana 1) sbagliato 3) sbagliato 2) e 4) OK

A4 Dalla definizione di equazione parametrica 1) e 3) OK 2) 4) sbagliate

A 5

La giacitura del piano  $\Pi_2$  e'  $ax - y - az = 0$ . Per  $a = 2$  tale piano contiene i vettori  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , che sono base della giacitura di  $\Pi_1$ , quindi se  $a = 2$  i piani sono paralleli. Il piano  $\Pi_1$  passa per 0, quindi i piani coincidono se  $a = 2$  e  $b = 0$  e non si incontrano se  $a = 2$  e  $b \neq 0$ , si incontrano ma non coincidono per  $a \neq 2$ .